رایانش کوانتومی
تبدیل فوریه کوانتومی

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

تبدیل فوریه کوانتومی

ریشهٔ N-ام واحد

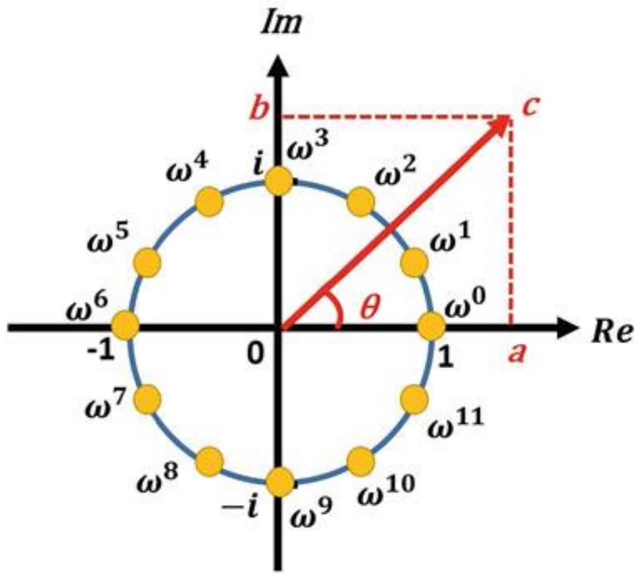
عدد مختلط $c = a + bi = |c|e^{i\theta} = |c|(\cos\theta + i sin\theta)$

$|c| = ۱$ منجر به $c = e^{i\theta} = (\cos\theta + i sin\theta)$

- دایره واحد
- مقادیر خاص روی دایره واحد ریشه‌های N-ام واحد
- $z^N = ۱ \Longrightarrow z = e^{i2\pi m/N}$

$$\left(e^{\frac{i2\pi m}{N}}\right)^N = e^{i۲\pi m} = \cos ۲\pi\text{m} + i \sin ۲\pi\text{m} = ۱$$

تعریف $\omega = e^{i2\pi/N}$ و ω^m معادل ریشه‌ها از ۰ تا $m - ۱$



تبدیل فوریه کوانتومی

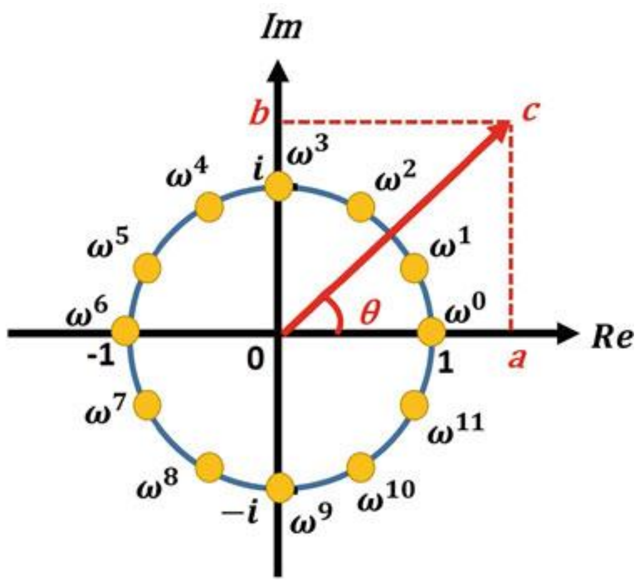
ویژگی‌ها

- حرکت پادساعتگرد با افزایش m تکرار با اتمام دور $\omega^{m+N} = \omega^m$
- جمع تمامی ریشه‌ها برابر صفر

$$\sum_{m=0}^{N-1} \omega^m = \omega^0 + \omega^1 + \cdots + \omega^{N-1}$$

$$= \frac{\omega^0 - \omega^N}{\omega^0 - \omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0$$

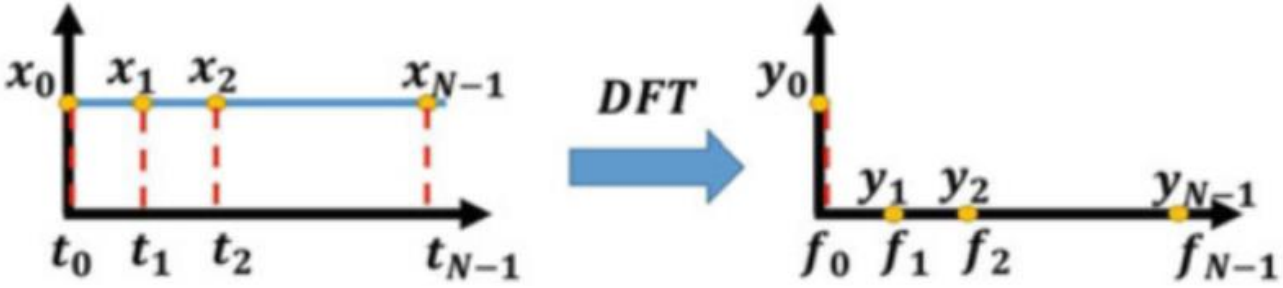
- $\omega^{N-m} = \omega^{-m}$



تبدیل فوریه گسسته

تبدیل از حوزه‌ای به حوزه دیگر

- از زمان به فرکانس
- مثال سیگنال ثابت



دو مجموعه بردار پایه

تبدیل فوریه گسسته

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \qquad \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{-kj} x_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi kj/N} x_j$$

$\omega = e^{\frac{i۲\pi}{N}}$ ریشهٔ N-ام واحد

- مقادیر جدید ترکیبی خطی از مقادیر قبلی

تبدیل فوریه گسسته

$$\vec{Y} = DFT\{\vec{X}\}$$

$$\vec{Y} = \boldsymbol{\Omega}\vec{X}$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \omega^{-0\cdot 0} & \omega^{-0\cdot 1} & \cdots & \omega^{-0\cdot (N-1)} \\ \omega^{-1\cdot 0} & \omega^{-1\cdot 1} & \cdots & \omega^{-1\cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{-(N-1)\cdot 0} & \omega^{-(N-1)\cdot 1} & \cdots & \omega^{-(N-1)\cdot (N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

تبدیل فوریه کوانتوم

در صورت یکسان دیدن حوزه‌ها

- تبدیل فوریه گسسته
  - صرفا چرخش بردار در پایهٔ داده شده

استفاده از حالت‌های پایه کوانتوم $|j\rangle$ به عنوان بردار پایه

- تبدیل فوریه کوانتومی
- گیتی کوانتومی
- تبعیت از ویژگی‌های گیت کوانتومی
  - یگانی بودن
  - فضای N بعدی و $N = 2^n$ و n تعداد کیوبیت‌ها

$$\boldsymbol{U_{QFT}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \omega^{-0\cdot 0} & \omega^{-0\cdot 1} & \cdots & \omega^{-0\cdot(N-1)} \\ \omega^{-1\cdot 0} & \omega^{-1\cdot 1} & \cdots & \omega^{-1\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{-(N-1)\cdot 0} & \omega^{-(N-1)\cdot 1} & \cdots & \omega^{-(N-1)\cdot(N-1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(N-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdots & \omega^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-2(N-1)} & \cdots & \omega^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

تبدیل فوریه گسسته

ماتریسی متقارن

نحوهٔ تعریف دیگر

- نمایش چگونگی تبدیل بردارهای پایه
  - بردارهای پایه $|j\rangle$ و $|k\rangle$

$$U_{QFT}|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\omega^{-kj}|k\rangle$$

- ردیف k و ستون j

$$U_{QFT,kj} = \langle k|U_{QFT}|j\rangle = \langle k|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k'=0}^{N-1}\omega^{-k'j}|k'\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\omega^{-kj}$$

تبدیل فوریه کوانتومی

$$U_{QFT}\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{-k\cdot 0}\,|k\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^{-0\cdot 0}\,|0\rangle + \omega^{-1\cdot 0}\,|1\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle$$

$$U_{QFT}\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{-k\cdot 1}\,|k\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^{-0\cdot 1}\,|0\rangle + \omega^{-1\cdot 1}\,|1\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^{-0\cdot 1}\,|0\rangle + e^{-i2\pi/2}\,|1\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle$$

ویژگی‌های تبدیل فوریه کوانتومی تک-کیوبیتی

- معادل گیت هدامرد
- $|0\rangle$ و $|۱\rangle$ و در نتیجه $N = ۲$

تبدیل فوریه کوانتومی

یگانی

- ستون m و ردیف n ماتریس U_{QFT}

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \omega^{-0\cdot m} \\ \omega^{-1\cdot m} \\ \vdots \\ \omega^{-(N-1)\cdot m} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \omega^{-0\cdot n} \\ \omega^{-1\cdot n} \\ \vdots \\ \omega^{-(N-1)\cdot n} \end{pmatrix}$$

تبدیل فوریه کوانتومی

$$\langle m|n\rangle = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}(\omega^{-l\cdot m})^{*}\omega^{-l\cdot n}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}(e^{-i2\pi l\cdot m/N})^{*}e^{-i2\pi l\cdot n/N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}(e^{-i2\pi l\cdot(-m)/N})e^{-i2\pi l\cdot n/N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}(\omega^{-l\cdot -m})\omega^{-l\cdot n}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}(\omega^{-l\cdot(n-m)})$$

یگانی

- ستون m و ردیف n ماتریس U_{QFT}
- اگر m=n آن‌گاه مقدار برابر یک در غیر این صورت برابر صفر

تبدیل فوریه کوانتومی

نمایش ماتریسی U_{QFT} با N=2

$$
\begin{aligned}
U_{QFT} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \omega^{-0\cdot 0} & \omega^{-0\cdot 1} \\ \omega^{-(2-1)\cdot 0} & \omega^{-(2-1)\cdot 1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{-i2\pi/2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

تبدیل فوریه کوانتومی

N=4

- دو کیوبیتی $\omega = e^{i2\pi/4} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$
- پس $\omega^{-j} = i^{-j}$

$$U_{QFT} = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i^{-1} & i^{-2} & i^{-3} \\ 1 & i^{-2} & i^{-4} & i^{-6} \\ 1 & i^{-3} & i^{-6} & i^{-9} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

- افزایش اعضای ستون‌های صفر و ۱ و ۲ و ۳ با ۱ $i^{-0} = ۱$، $i^{-۱} = -i$، $i^{-۲} = -۱$، $i^{-۳} = i$

تبدیل معکوس فوریه کوانتومی

$$U_{IQFT} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \omega^{0\cdot 0} & \omega^{0\cdot 1} & \cdots & \omega^{0\cdot(N-1)} \\ \omega^{1\cdot 0} & \omega^{1\cdot 1} & \cdots & \omega^{1\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{(N-1)\cdot 0} & \omega^{(N-1)\cdot 1} & \cdots & \omega^{(N-1)\cdot(N-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{1} & \omega^{2} & \cdots & \omega^{(N-1)} \\ 1 & \omega^{2} & \omega^{4} & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{(N-1)} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

منابع

مانوچچی

ؤانگ

نیلسن

شنکار